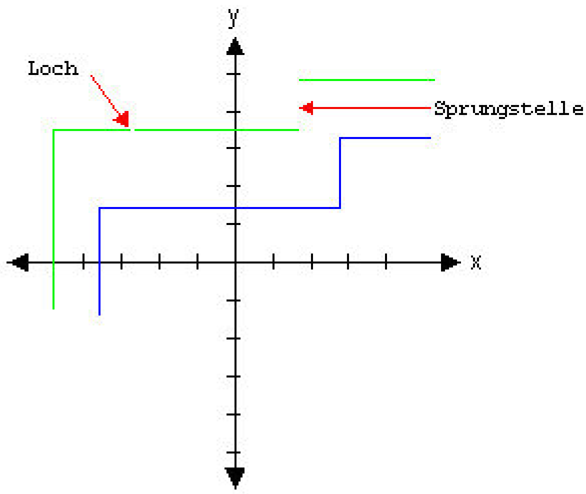
Stetig- und Unstetigkeiten



Erläuterung zu stetig und unstetig:

Die blaue Funktion ist durchgängig, das bedeutet sie ist stetig. Die grüne Funktion hat ein Loch und eine Sprungstelle wo sie nicht definiert ist. Sie ist unstetig. Jede Funktion die an irgendeiner Stelle nicht definiert ist nennt man unstetig.

Aufgabe 1:

Sind folgende Funktionen f(x) auf dem Intervall [a;b] stetig oder unstetig ?
Begründen sie das Ergebnis !

$$f(x)=\begin{Bmatrix} \sqrt{x}+1 \text{ für } x\geq 0 \\ -x+1 \text{ für } x>0 \end{Bmatrix}$$ auf [-5;5]

Lösung:

Als erstes überlegt man sich ob es kritische Stellen bei den beiden Gleichungen gibt. Damit ist gemeint ob es Stellen gibt die nicht definiert sind wie zum Beispiel bei der Division durch Null. Es wird also nach Stellen gesucht, bei denen ein Taschenrechner "Error" ausgeben würde.

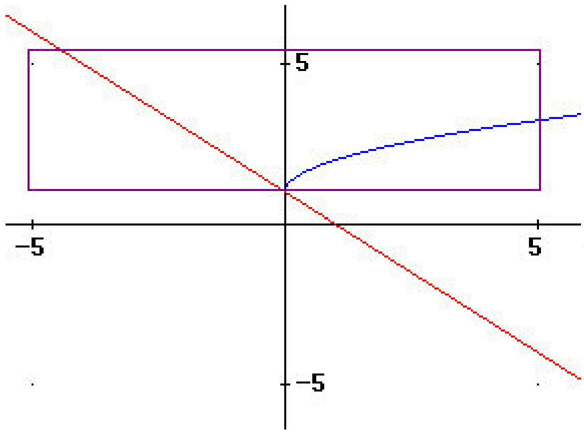
Die beiden Gleichungen besitzen solche Stellen nicht. Die beiden Gleichungen einzeln betrachtet sind also stetig. Nun überprüfen wir noch ob die Funktion immer noch stetig ist wenn man sie zusammen betrachtet.

Die erste Funktion ist für x über Null zuständig und die zweite für x unter Null. Sie sollten sich also bei Null treffen. Um nun zu testen ob sich wirklich treffen rechnen wir einfach aus was bei x=0 mit den Funktionen passiert.

$$f(x)=\sqrt{0}+1=1 \qquad 0+1=1$$

Sie sind beide gleich 1 und das bedeutet sie treffen sich wirklich und das bedeutet, dass unsere Funktion stetig ist.

gezeichnet sieht das so aus:



$\sqrt{x}+1$ blau

$-x+1$ rot

Bei der Betrachtung ist nur der Bereich x von -5 bis +5, 1. Gleichung größer gleich 0 und 2. Gleichung kleiner Null wie oben in der Aufgabenstellung angegeben relevant [violett eingerahmt].

Auch hier sieht man das die Funktion stetig ist.

Aufgabe 2:

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{x}{(x^2-1)}\ für\ 0\le x\le 5\,;\,x\ne 1 \\ 0\ für\ x=1 \end{matrix}\right\}$$

Lösung:

Bei der ersten Gleichung sieht man das sie für x=1 nicht definiert ist. Sie wäre auch für x=-1 nicht definiert, dass ist aber irrelevant da es außerhalb des Definitionsbereiches $[0\le x\le 5]$ liegt. In der zweiten Gleichung steht aber das für x=1 null definiert ist. Somit könnte man glauben das die Funktion stetig ist. Das überprüfen wir aber lieber genauer.

Wir schauen uns mal die Werte um x=1 an. Zum Beispiel 1,01 und 0,99.

$$f(x)=\frac{1{,}01}{(1{,}01^2-1)}=50{,}25 \qquad f(x)=\frac{0{,}99}{(0{,}99^2-1)}=-49{,}75$$

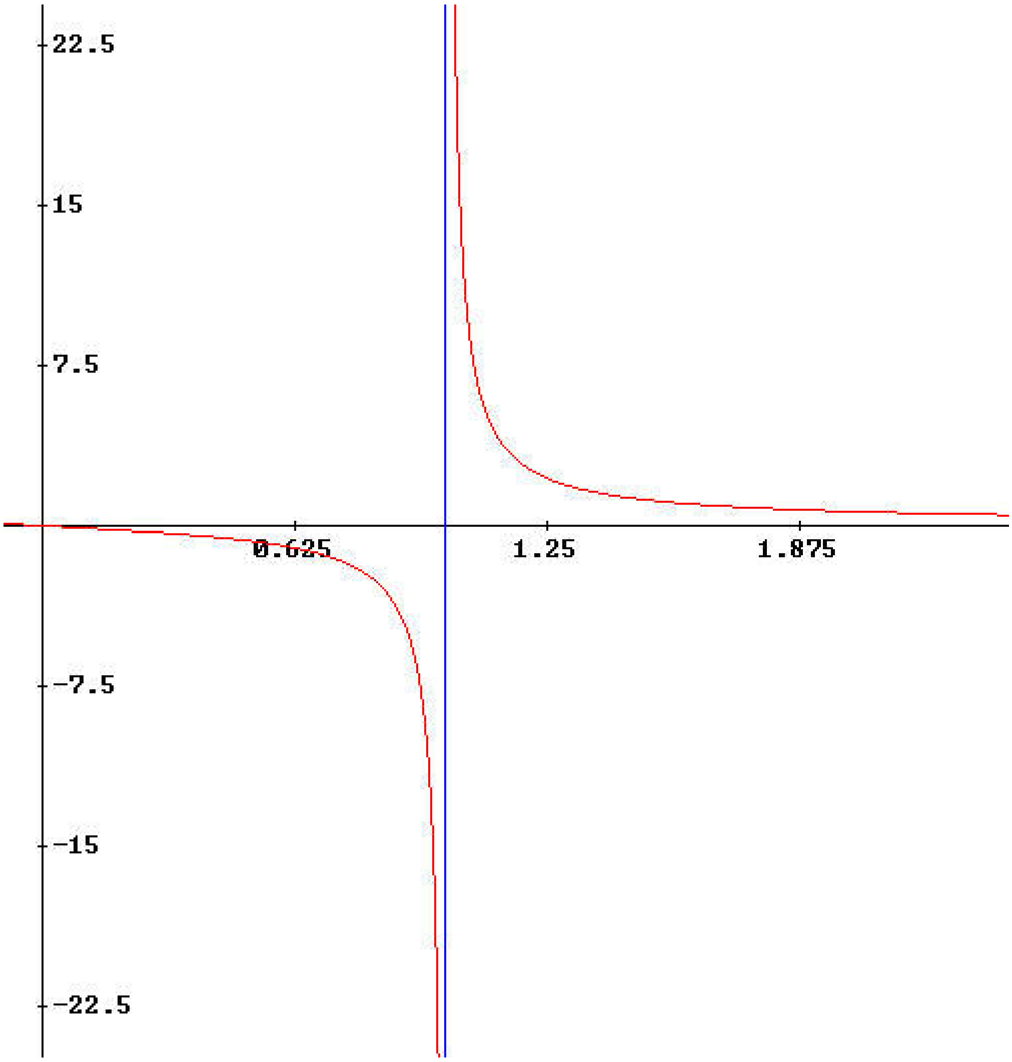
Die Werte 50,25 und -49,75 liegen so weit auseinander, dass sie niemals von einem Punkt, also 0 für x=1 "gestopft" werden können.

Ein weiterer Test beweist die Vermutung.

$$f(x)=\frac{1{,}001}{(1{,}001^2-1)}=500{,}25 \qquad f(x)=\frac{0{,}999}{(0{,}999^2-1)}=-499{,}75$$

x=1 scheint also eine Polstelle zu sein, das bedeutet der Graph splittet sich an der Stelle und ein Teil schießt nach + Unendlich und ein Teil nach - Unendlich.

Graph:



Ich habe an der Stelle x=1 eine Hilfslinie gezeichnet um zu verdeutlichen, dass der Graph (hier übrigens rot ;-)dargestellt) x=1 nicht erreicht.

Den letzten Beweis, dass der Graph an der Stelle x=1 unstetig ist kann man in einem Mathelehrbuch finden (Rießinger - Mathematik für Ingenieure S.246 Zeile 8-10 *ggg*). **Eine Funktion hat dann eine Polstelle, wenn der Nenner gleich null wird, der Zähler aber von null verschieden ist.** Wenn man x=1 in die erste Gleichung einsetzt ist dies ja der Fall und somit ist es amtlich. Die Funktion ist unstetig !