Lösungen für 19.Übung Mathematik Sommersemester

Aufgabe 1: a)

allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_h(x) = c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int 4x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = 4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = 4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int e^z dz = 4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^z = 4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = 4$$

Substitution: $z = \frac{x^2}{2} \quad \rightarrow \quad dz = \frac{2x}{2} dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dz}{x}$

allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 4$$

b) $$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y_h(x) = c^* \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} = c^* \cdot e^{-\ln|x|} = \frac{c^*}{e^{\ln|x|}} = \frac{c^*}{|x|} = \frac{c}{x}$$

partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = \frac{1}{|x|} \cdot \int \sin x \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} dx = \frac{1}{|x|} \int \sin x \cdot e^{\ln|x|} dx = \frac{1}{|x|} \int |x| \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{|x|} \cdot \left(-|x| \cdot \cos x + \int \frac{|x|}{x} \cos x \, dx \right) =$$

partielle Integration: $v = |x| \quad u' = \sin x$, $v' = \frac{|x|}{x} \quad u = -\cos x$ | $v = \frac{|x|}{x} \quad u' = \cos x$, $v' = \frac{\frac{|x|}{x} \cdot x - |x|}{x^2} = 0 \quad u = \sin x$

$$= \frac{1}{|x|} \cdot \left(-|x| \cdot \cos x + \frac{|x|}{x} \cdot \sin x \right) = -\cos x + \frac{\sin x}{x}$$

allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = \frac{c}{x} - \cos x + \frac{\sin x}{x}$$

c)

allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y_h(x) = c \cdot e^{\int 2\cos x dx} = c \cdot e^{2\sin x}$$

partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = e^{2\sin x} \cdot \int \cos x \cdot e^{-2\sin x} dx = e^{2\sin x} \cdot \int \cos x \cdot z \cdot \frac{dz}{-2 \cdot z \cdot \cos x} = e^{2\sin x} \cdot \int -\frac{1}{2} dz = e^{2\sin x} \cdot \left(-\frac{1}{2} z \right) =$$

$$Substitution: \quad z = e^{-2\sin x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -2\cos x \cdot e^{-2\sin x} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dz}{-2 \cdot z \cdot \cos x}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{2\sin x} \cdot e^{-2\sin x} = -\frac{1}{2}$$

allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = c \cdot e^{2\sin x} - \frac{1}{2}$$

d) $$y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2+4}{x} = x + \frac{4}{x}$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y_h(x) = c^* \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} = c^* \cdot e^{\ln|x|} = c^* \cdot |x| = c \cdot x$$

partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = |x| \cdot \int \left(x + \frac{4}{x} \right) \cdot e^{-\ln|x|} dx = |x| \cdot \int \left(x + \frac{4}{x} \right) \cdot \frac{1}{|x|} dx = |x| \cdot \int \left(\frac{x}{|x|} + \frac{4}{x \cdot |x|} \right) dx = |x| \cdot \left(\int \frac{|x|}{x} dx + 4 \cdot \int \frac{dx}{x \cdot |x|} \right) =$$

$$= |x| \cdot \left(|x| + 4 \cdot \int \frac{dx}{x \cdot |x|} \right) = |x| \cdot \left(|x| + 4 \cdot \int \frac{1}{x \cdot z} . \frac{x \cdot dz}{z} \right) = |x| \cdot \left(|x| + 4 \cdot \int \frac{dz}{z^2} \right) = |x| \cdot \left(|x| - \frac{4}{z} \right) =$$

$$Substitution \quad z = |x| \quad \to \quad dz = \frac{|x|}{x} \cdot dx = \frac{z}{x} \cdot dx \quad \to \quad dx = \frac{x}{z} \cdot dz$$

$$= |x| \cdot \left(|x| - \frac{4}{|x|} \right) = |x|^2 - 4 = x^2 - 4$$

allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = cx + x^2 - 4$$

Aufgabe 2:

a)

$$y(0) = c \cdot e^0 + 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = -3$$

$$y(x) = -3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 4$$

b)

$$y(\pi) = \frac{c}{\pi} - \cos\pi + \frac{1}{\pi}\sin\pi = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{\pi} + 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{\pi} = -2 \quad \Rightarrow \quad c = -2\pi$$

$$y(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} - \frac{2\pi}{x}$$

c)

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c \cdot e^{2\sin\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad c \cdot e^2 - \frac{1}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad c \cdot e^2 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{5}{2} \cdot e^{-2}$$

$$y(x) = \frac{5}{2} \cdot e^{-2} \cdot e^{2\sin x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(5 \cdot e^{2\sin x - 2} - 1\right)$$

d)

$$y(2) = 2c + 4 - 4 = -2 \quad \Rightarrow \quad 2c = -2 \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

$$y(x) = -x + x^2 - 4 = x^2 - x - 4$$