Lösungen für 3.Übung Mathematik Sommersemester

Aufgabe 1: a) rg(A) = 2

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &x_3 = x_4 = x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \\ &2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ + allgemeine homogene Lösung von Aufgabe 1a - Übung 11!!

b) $rg(A) = 2 \quad ; \quad rg(\tilde{A}) = ?$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -22 - 22 + 44 = 0 \quad \Rightarrow \quad rg(\tilde{A}) = 2$$

$\Rightarrow$ **eindeutige Lösung !!**

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 3x_1 & - & x_2 & = & 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $rg(A) = 2 \quad ; \quad rg(\tilde{A}) = ?$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ -4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -30 - 70 + 44 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg(\tilde{A}) = 3$$

$\Rightarrow$ **es existiert keine Lösung !!!**

d) 3.Zeile = -1.Zeile und 2.Zeile = -2 * 1.Zeile => rg(A) = 1 => $2x_1 = 4$ => $x_1 = 2$

spezielle Lösung des inhomogenen Systems: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Bestimmung der allgemeinen Lösung des homogenen Systems:</u>

$2x_1 = 3x_2$

$x_2 = 1$ => $2x_1 = 3$ => $x_1 = 1{,}5$

<u>allgemeine Lösung:</u> $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) **keine Lösung**, denn rg(A) = 2 , aber rg($\tilde{A}$) = 3 , da

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 3 \cdot 18 + 10 \neq 0$$

Aufgabe 2: $rg(A) = 2 \quad ; \quad rg(\tilde{A}) = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(\mathcal{L}) = 2$

spezielle Lösung des inhomogenen Systems:

$$x_3 = x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x_1 + 7x_2 = -10$$

$$x_1 + 2x_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$4x_1 + 7x_2 = 26x_3 - 9x_4$$

$$x_1 + 2x_2 = 7x_3 - 2x_4$$

$$x_3 = 1 \quad ; \quad x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x_1 + 7x_2 = 26$$

$$x_1 + 2x_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$$

$$\Rightarrow \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0 \quad ; \quad x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad 4x_1 + 7x_2 = -9$$

$$x_1 + 2x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4$$

$$\Rightarrow \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allgemeine Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

a) Ein quadratisches System besitzt genau eine Lösung, wenn $|A| \neq 0$. Daraus folgt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 4 - a^2 - 2 + 2 \cdot a - a + 4 = 6 + a - a^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a_1 = 3\,;\, a_2 = -2$$

$\Rightarrow |A| \neq 0$, wenn **$a \neq -2$ und $a \neq 3$, d.h. dann existiert genau eine Lösung!**

b) keine Lösung existiert, wenn $|A| = 0$ und $rg(A) \neq rg(\tilde{A})$

$\Rightarrow$ Da $|A| = 0$ ist $rg(A) = 2$ $\Rightarrow$ $rg(\tilde{A}) = 3$ muß gelten, damit es keine Lösungen gibt!

In Frage kommen nur die Werte a = -2 und a = 3, da nur dann $|A| = 0$

1.Fall: a = -2 $\Rightarrow$ $\quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Test:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 10 + 1 - 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rg(\tilde{A}) = 3$$

$\Rightarrow$ **für a = -2 existieren keine Lösungen**!

2.Fall: a = 3 $\Rightarrow$ $\quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Da $z_1 + z_2 = z_3 \quad in \quad \tilde{A} \quad \Rightarrow \quad rg(\tilde{A}) = 2 \quad \Rightarrow$ für a = 3 existieren unendlich viele Lösungen!

c) Für **a = 3 existieren unendlich viele Lösungen** (siehe b) - Fall 2)!