Lösungen für 13.Übung Mathematik Sommersemester

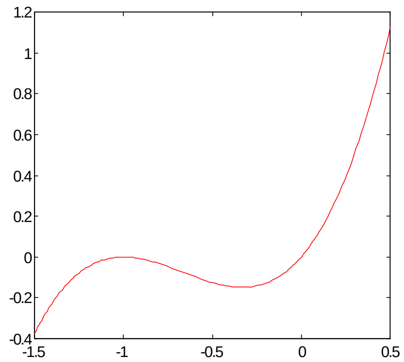
Aufgabe 1:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

a) $f'(x)$ muß 2 reelle Nullstellen besitzen $\Rightarrow$ $a \neq 0$ *und* $b^2 - 3ac > 0$

Beispiel: a = 1 ; b = 2 ; c = 1 ; d = 0



MATLAB:

```
fplot('x.^3+2.*x.^2+x',[-1.5,0.5])
```

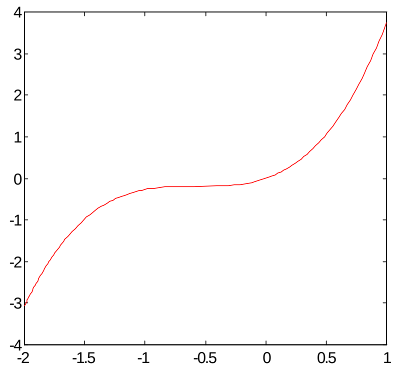
b) Sattelpunkt heißt $f''(x) = 0$ $\Rightarrow$ $a \neq 0$ *und* $x_0 = \dfrac{-b}{3a}$

außerdem muß $f'(x_0) = 0$ gelten $\Rightarrow$ $b^2 - 3ac = 0$ $\Rightarrow$ $c = \dfrac{b^2}{3a}$

Nach weiteren Umformungen sieht man, daß die Funktionen die Form:

$$f(x) = a \cdot (x - x_0)^3 + d_1 \quad \textit{mit} \quad d_1 \quad \textit{beliebig}$$

haben (Die Funktionen sind damit im Grund kubische Polynome mit dreifachen Nullstellen, die in y-Richtung um den Wert d_1 verschoben sind).

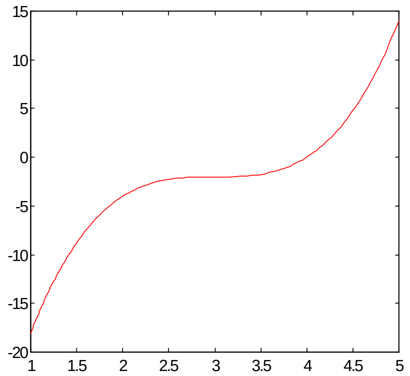


Beispiel: 1) a = 1 ; b = $\sqrt{3}$; d = 0 $\Rightarrow$ c = 1

MATLAB:

```
fplot('x.^3+sqrt(3)*x.^2+x',[-2,1])
```

2) a = 2 ; x_0 = 3 ; d_1 = -2



MATLAB:

```
fplot('2*(x-3).^3-2',[1,5])
```

c) $f''(x) = 0$ $\Rightarrow$ $a \neq 0$ *und* $x_0 = \dfrac{-b}{3a}$

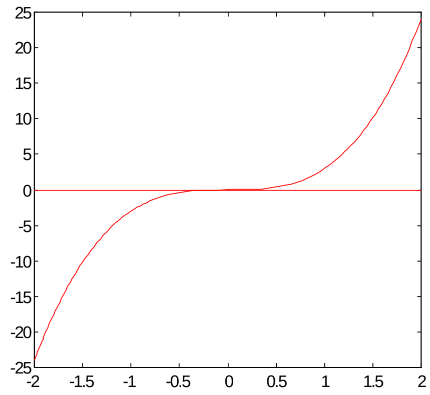
außerdem muß $f(x_0) = 0$ gelten $\Rightarrow$ $2b^3 - 9abc + 27a^2 d = 0$

<u>Spezialfälle</u>: $b = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0 \quad und \quad c\ beliebig \quad \Rightarrow \quad f(x) = ax^3 + cx$

<u>Beispiele für den Spezialfall</u>: 1) a = 3 ; c=0

<u>MATLAB:</u>

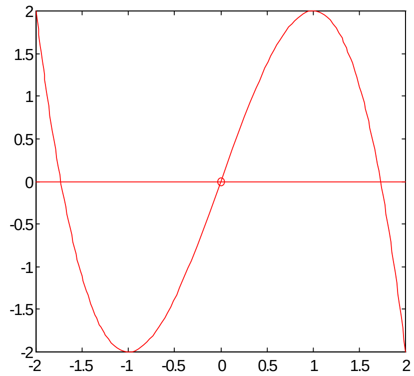
```
hold off
fplot('3*x.^3',[-2,2])
hold on
plot([-2,2],[0,0])
```



2) a = -1 ; c = 3

<u>MATLAB:</u>

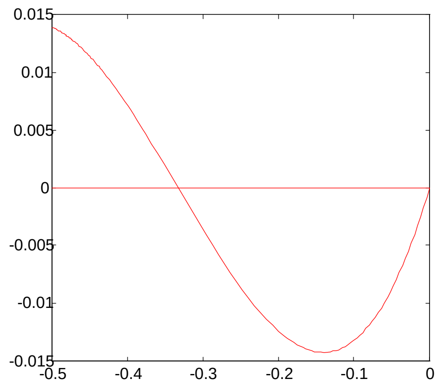
```
hold off
fplot('-x.^3+3*x',[-2,2])
hold on
plot([-2,2],[0,0])
plot(0,0,'ro')
```



<u>allgemeines Beispiel</u>: a = 1 ; b = 1 ; c = $\frac{2}{9}$; d = 0

<u>MATLAB:</u>

```
hold off
fplot('x.^3+x.^2+2/9*x',[-0.5,0])
hold on
fplot([-0.5,0],[0,0])
```



Aufgabe 2:

$a)$ $D_f = \mathbb{R}$ $\quad W_f = \{ y \mid y \geq 0 \; und \; y \in \mathbb{R} \}$; keine Symmetrie ; keine Periodizität ;

Schnittpunkt mit der x- und y- Achse ist jeweils P: (0 ; 0)

f(x) ist beliebig oft stetig differenzierbar

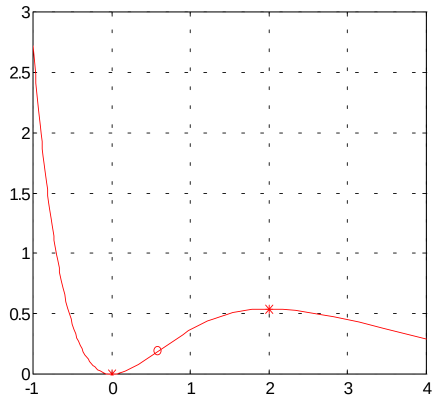
$f'(x) = x \cdot (2-x) \cdot e^{-x}$ $\qquad f''(x) = (2 - 4x + x^2) \cdot e^{-x}$

Tiefpunkt bei T: (0 ; 0) ; Hochpunkt bei H: (2 ; 0,54)

Wendepunkte bei $W_1 : \left(2-\sqrt{2}\,;0{,}19\right)$ *und* $W_2 : \left(2+\sqrt{2}\,;0{,}38\right)$

MATLAB:

```
fplot('x.^2.*exp(-x)',[-1,4])
hold on
plot([0,2],[0,0.54],'*')
plot([2-sqrt(2),2+sqrt(2)],[0.19,0.38],'o')
grid on
```



$b)$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad W_f = \mathbb{R}$; punktsymmetrisch zum Ursprung ; keine Periodizität ;

Schnittpunkte mit der x-Achse sind S_1: (-1 ; 0) und S_2: (1 , 0)

f(x) ist beliebig oft stetig differenzierbar

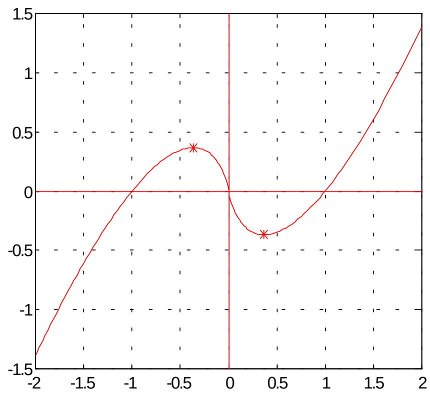
$f'(x) = 1 + \ln|x|$ $\qquad f''(x) = \frac{1}{x}$

Tiefpunkt bei T: $\left(\frac{1}{e}\,;-\frac{1}{e}\right)$, Hochpunkt bei H: $\left(-\frac{1}{e}\,;\frac{1}{e}\right)$

f(x) ist konkav für (-∞ ; 0) und konvex für (0 ; ∞) ;
ein Wendepunkt existiert nicht, da die Funktion für $x_0 = 0$ nicht definiert ist!!!

MATLAB:

```
hold off
fplot('x.*log(abs(x))',[-2,2])
grid on
hold on
plot([-2,2],[0,0])
plot([0,0],[-1.5,1.5])
plot([1/exp(1),-1/exp(1)],[-1/exp(1),1/exp(1)],'*')
```



$c)$ $D_f = \mathbb{R}$; symmetrisch zur y-Achse; Periode: 2π

Schnittpunkt mit y-Acshe: (0 ; 1,7183) = (0; e – 1)
Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstellen):

$$0 = e^{\cos x} - 1$$

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$$

Ableitungen:

$$y' = -\sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$y'' = \sin^2 x \cdot e^{\cos x} - \cos x \cdot e^{\cos x}$$

$$= \left(\sin^2 x - \cos x\right) \cdot e^{\cos x}$$

lokale Extrema:

$$y' = 0 \Rightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 + 2k\pi \quad ; \quad x_2 = \pi + 2k\pi$$

Tests:

$$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{\cos\frac{-\pi}{2}} = 1 > 0$$

VZW Maximum!

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{\cos\frac{\pi}{2}} = -1 < 0$$

VZW Minimum!

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot e^{\cos\frac{3\pi}{2}} = 1 > 0$$

lokale und globale Extrema:

Minimum: $\left(\pi + 2k\pi \; ; e^{\cos\pi} - 1\right) = (\pi + 2k\pi \; ; e^{-1} - 1) = (\pi + 2k\pi \; ; -0{,}6321205)$

Maximum: $\left(2k\pi \; ; e^{\cos 0} - 1\right) = (2k\pi \; ; 1{,}7183)$

Wertebereich: $[-0{,}6321205 \; ; 1{,}7183]$

Wendepunkte:

$$y'' = \left(\sin^2 x - \cos x\right) \cdot e^{\cos x} = 0$$

$$\sin^2 x - \cos x = 0$$

$$1 - \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Substitution $z = \cos x \quad \Rightarrow \quad z^2 + z - 1 = 0$

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0{,}618$$

$$z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -1{,}618$$

$x_1 = \arccos 0{,}618 = 0{,}9046$

$x_2 = 2\pi - x_1 = 5{,}37858$

$x_3 = \arccos(-1{,}618)$ nicht möglich!!!!!

Tests:

$$f''(0) = -e^0 < 0$$

VZW $\Rightarrow$ Wendepunkt

$$f''(\pi) = e^{\cos\pi} > 0$$

VZW $\Rightarrow$ Wendepunkt

$$f''(2\pi) = f''(0) < 0$$

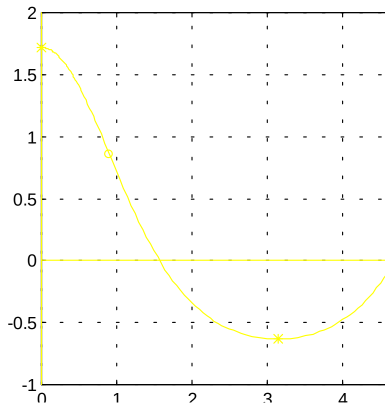
Wendepunkte:

WP_1: (0,9046+2kπ; 0,8552)

WP_2: (5,37858+2kπ; 0,8552)

MATLAB:

```
hold off
fplot('exp(cos(x))-1',[0,2*pi])
hold on
plot([0,2*pi],[0,0])
plot([0,0],[-1,2])
plot([0,pi],[exp(1)-1,exp(-1)-1],'*')
plot([0.9046,5.3786],[0.8552,0.8552],'o')
grid on
```



$d)\quad D_f = W_f = \mathbb{R}$; keine Symmetrie ; keine Periodizität ;

Schnittpunkt mit der x-Achse bei S_x: (2,36 ; 0)

Schnittpunkt mit der y-Achse bei S_y: (0 ; -2)

f(x) ist beliebig oft stetig differenzierbar

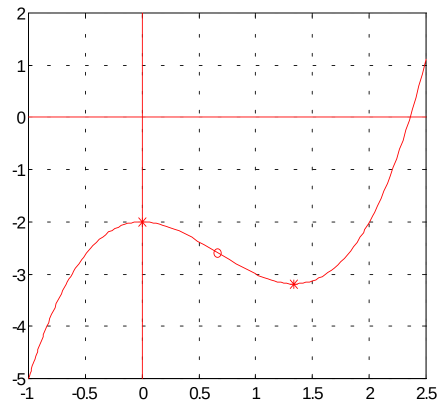
$f'(x) = 3x^2 - 4x \qquad f''(x) = 6x - 4$

Tiefpunkt bei $T: \left(\frac{4}{3}; -3{,}1851\right)$; Hochpunkt bei H: (0 ; -2)

Wendepunkt bei $W: \left(\frac{2}{3}; -2{,}5926\right)$

MATLAB:

```
hold off
fplot('x.^3-2*x.^2-2',[-1,2.5])
hold on
plot([-1,2.5],[0,0])
plot([0,0],[-5,2])
plot([4/3,0],[-3.1851,-2],'*')
plot(2/3,-2.5926,'o')
grid on
```



e) Nullstelle des Nenners: $x_1 = -1$ ===> $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Nullstellen von f(x) = Nullstellen des Zählers; da der Zähler keine reellen Nullstellen besitzt, hat auch f(x) keine Nullstellen!

Schnittpunkt mit der y-Achse: f(0) = 5 ===> P: (0 ; 5)

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{(2x-4)\cdot(x+1)^2 - 2\cdot(x^2-4x+5)\cdot(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(2x-4)\cdot(x+1)-2x^2+8x-10}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(2\cdot(x+1)+2x-4-4x+8)\cdot(x+1)^3-((2x-4)\cdot(x+1)-2x^2+8x-10)\cdot 3\cdot(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$= \frac{(18-6x)\cdot(x+1)+6x^2-24x+30}{(x+1)^4}$$

Extremwerte:

$$f'(x)=0 \Rightarrow (2x-4)\cdot(x+1)-2x^2+8x-10=0$$
$$2x^2-4x+2x-4-2x^2+8x-10=0$$
$$6x-14=0$$
$$x_1 = \frac{7}{3}$$

Da der Nenner für x ≠ -1 stets positiv ist, braucht man nur das Vorzeichenverhalten des Zählers zu betrachten:

$$f_Z'(0) = -14 < 0$$
$$f_Z'(3) = 18-14 > 0$$

VZ - Wechsel von - nach + ==> relatives Minimum bei P: (7/3 ; 0,1)

Polstelle bei x_1 = -1 !

Verhalten an der Polstelle: $\lim\limits_{x\to x_1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_1+0} f(x) = +\infty$

Verhalten für $x \to \pm\infty$: Zählergrad = Nennergrad und a_2 = 1 sowie b_2 = 1 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

$\Rightarrow$ relatives Minimum ist auch absolutes Minimum!

Ein absolutes Maximum existiert nicht! ===> $W_f = [0{,}1\ ;+\infty)$

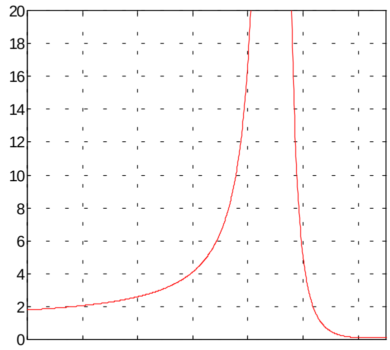
Wendepunkte:

$$f''(x)=0 \quad\Rightarrow\quad (18-6x)\cdot(x+1)+6x^2-24x+30=0$$
$$18x-6x^2+18-6x+6x^2-24x+30=0$$
$$-12x+48=0$$
$$x_1 = 4$$

$f_Z''(0)\cdot f_Z''(5) = 48-60+48 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad$ Wendepunkt bei P: (4 ; 0,2)

MATLAB:

```
x=linspace(-10,4,1000);
plot(x,(x.^2-4*x+5)./(x+1).^2)
axis([-10,3,0,20])
grid on
```




```
plot(x,(x.^2-4*x+5)./(x+1).^2)
axis([0,4,0,1])
grid on
```