Aufgabe 1:

a) **Fall 1:** $\alpha = 1$ **!!!**

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}[\ln x]_a^b = \lim_{b\to\infty}\ln b - \ln a = \infty \Rightarrow \quad \text{Integral existiert nicht!!}$$

Fall 2: $\alpha \neq 1$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty}\int_a^b x^{-\alpha} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^b = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Fall 2.1:

$\alpha>1 \quad \Rightarrow \quad 1-\alpha<0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0$

$$\Rightarrow \int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \quad \text{für } \alpha \in (1;\infty)$$

Fall 2.2: $0<\alpha<1 \quad \Rightarrow \quad 0<1-\alpha<1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \infty$

$\Rightarrow$ Integral existiert nicht für $0<\alpha<1$!

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, dx = [-\cos x]_{-\infty}^{\infty}$$

Da die Grenzwerte des Kosinus für $x\to-\infty$ bzw. für $x\to\infty$ jeweils unbestimmt sind, existiert das Integral nicht!

Andere Begründung: $\lim_{x\to\pm\infty}\sin(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ Integral existiert nicht!

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\, dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b x\, dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^0 + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = -\lim_{a\to-\infty}\frac{a^2}{2} + \lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{b^2}{2} - \lim_{b\to\infty}\frac{a^2}{2} = \infty - \infty$$

Grenzwert ist unbestimmt! $\Rightarrow$ Integral existiert nicht!

Andere Begründung: $\lim_{x\to\pm\infty} x \neq 0 \Rightarrow$ Integral existiert nicht!

Falsch wäre die folgende Berechnung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a x\, dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-a}^a = \lim_{a\to\infty}\frac{a^2}{2} - \lim_{a\to\infty}\frac{a^2}{2} = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \lim_{a\to\infty} 0 = 0$$

!!!

d)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}[\arctan x]_a^0 + \lim_{b\to\infty}[\arctan x]_0^b =$$

$$-\lim_{a\to-\infty}\arctan a + \lim_{b\to\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

e) $$\int_2^3 \frac{dx}{x-3} = \lim_{b\to3}\int_2^b \frac{dx}{x-3} = \lim_{b\to3}[\ln|x-3|]_2^b = \lim_{b\to3}\ln|b-3| - \ln 1 = \lim_{b\to3}\ln|b-3| = -\infty$$

$\Rightarrow$ Integral existiert nicht!!!

f) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{b\to 0} \int\limits_{-1}^{b} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{b\to 0} \left[\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} \right]_{1-}^{b} = \frac{3}{2} \cdot \left(\lim\limits_{b\to 0} \sqrt[3]{b^2} - 1 \right) = -\frac{3}{2}$

g) $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot e^x dx = \left[x \cdot e^x \right]_{-\infty}^{0} - \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = \left[x \cdot e^x - e^x \right]_{-\infty}^{0} = \left[e^x \cdot (x-1) \right]_{-\infty}^{0} = e^0 \cdot (-1) - \lim\limits_{b\to -\infty} e^b \cdot (b-1) = -1$

Aufgabe 2: Schnittpunkte von Gerade und Parabel bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$!

$\Rightarrow$ $F = \int\limits_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$

Aufgabe 3:

a)

$$f(\varphi) = \cos^2 \frac{\varphi}{2} \qquad f'(\varphi) = \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$s = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^4 \frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)}\, d\varphi$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 2 \cdot \left[\sin \frac{\varphi}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2} \right) = 4$$

b)

$$y = \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \qquad y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$s = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\, dx = \int\limits_0^1 (1+x)^{1/2} dx = \frac{2}{3} \cdot \left[(x+1)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \left(2^{3/2} - 1^{3/2} \right) = \frac{2}{3} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{2} - 1 \right)$$

c)

$$x = \sin t \qquad \dot{x} = \cos t$$

$$y = 1 - \cos t \qquad \dot{y} = \sin t$$

$$s = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt = [t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$