Aufgabe 1:

$$a)\quad f'(x) = 8x^7 + 20x^3 - 9x^2$$
$$f''(x) = 56x^6 + 60x^2 - 18x \qquad D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$b)\quad f'(x) = \left(x^2 + 2x + 3\right) \cdot e^x$$
$$f''(x) = \left(x^2 + 4x + 5\right) \cdot e^x \qquad D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$c)\quad f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$$
$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{-1}{x}\right) - \frac{2}{x^3}(1 - \ln x) = \frac{1}{x^3} \cdot (-3 + 2\ln x) \qquad D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}^+$$

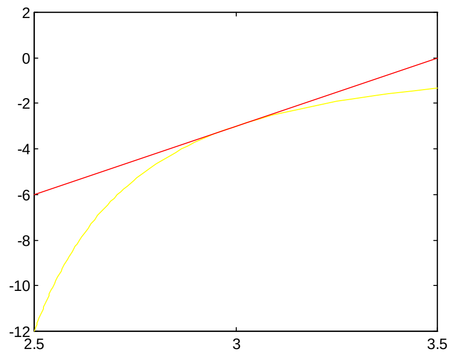
$$d)\quad f'(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 2x - 1}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2 \cdot \left(2x^3 - 3x^2 + 6x - 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3} \qquad D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$$

$$e)\quad f'(x) = 2x \cdot |x| + x^2 \cdot \frac{|x|}{x} = 3x \cdot |x|$$
$$f''(x) = 3|x| + 3x \cdot \frac{|x|}{x} = 6 \cdot |x| \qquad D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$$

Die Stelle x = 0 muß separat untersucht werden!

$$f)\quad f'(x) = \frac{4x}{2x^2 + 7}$$
$$f''(x) = \frac{4\left(7 - 2x^2\right)}{\left(2x^2 + 7\right)^2} \qquad D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}$$

Aufgabe 2: $f'(x) = -\dfrac{3}{(x-2)^2}$



$$-3 = -3(x_0 - 2)^2$$
$$-3 = -3x_0^2 + 12x_0 - 12$$
$$0 = x_0^2 - 4x_0 + 3$$
$$x_{0,1} = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$$
$$\Rightarrow \quad x_0 = 3$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \textit{keine Lösung da } x_1 \notin D_f$$

Aufgabe 3: Kritische Stelle ist $x_0 = 4$ $\Rightarrow$ $f(4) = 0{,}25 \cdot 4^2 = 4 = (4-2)^2$

$\Rightarrow$ f(x) hat bei $x_0 = 4$ **keine** Sprungstelle ! $\Rightarrow$ f(x) ist auf $\mathbb{R}$ stetig !

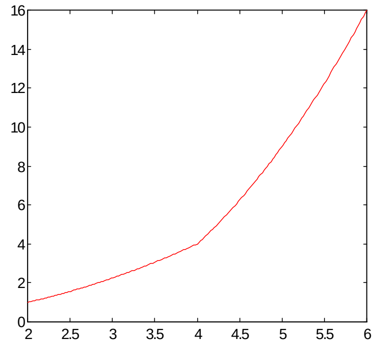
Untersuchung der Ableitung : $$f'(x) = \begin{cases} 0{,}5x & \text{für } -\infty < x < 4 \\ 2(x-2) & \text{für } 4 < x < \infty \end{cases}$$

An der Stelle $x_0 = 4$ gilt : $f_L'(4) = 2 \neq f_R'(4) = 2 \cdot (4-2) = 4$

$\Rightarrow$ f(x) ist auf $\mathbb{R}$ nicht differenzierbar !!

MATLAB:

```
hold off
x=linspace(2,4);
plot(x,0.25*x.^2)
hold on
x=linspace(4,6);
plot (x,(x-2).^2)
```

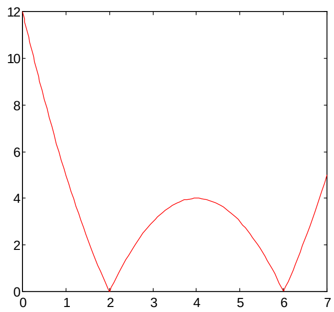


Aufgabe 4: f(x) nicht differenzierbar an den Stellen, für die $x^2 - 8x + 12 = 0$ gilt, d.h. für

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-12} \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1 = 6} \quad und \quad \underline{x_2 = 2}$$

MATLAB:

```
hold off
fplot('abs(x.^2-8*x+12)',[0,7])
```



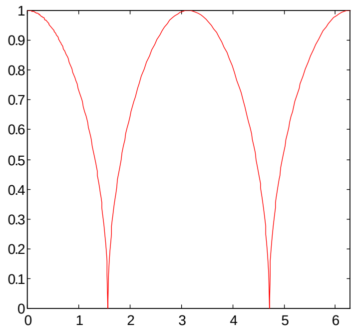
Aufgabe 5: a) Ableitungen existieren nicht für Stellen mit sinx = 0 $\Rightarrow$ $x_k = k\,\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

b) analog zu a) ergibt sich $x_k = 0{,}5k\,\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

c) analog zu a) und b) ergibt sich $x_k = 0{,}5(2k+1)\,\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

MATLAB:

```
fplot('sqrt(abs(cos(x)))',[0,2*pi])
```



Aufgabe 6:

$$a)\quad f'(x) = \frac{(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot 2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{2\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4}$$

$$\Rightarrow\quad f^{(n)}(x) = \frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$b)\quad f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2^2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2^3}\cdot x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3\cdot 5}{2^4}\cdot x^{-\frac{7}{2}}$$

$$\Rightarrow\quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

Aufgabe 7: $f(x) = a\cdot\sin\frac{x}{a} = 0 \Rightarrow x_k = ak\pi \,\text{mit}\, k\in\mathbb{Z}$

$$f'(x) = \cos\frac{x}{a} \qquad\Rightarrow\qquad f'(x_k) = \cos k\pi = (-1)^k$$

Aufgabe 8: $f'(x) = \dfrac{2}{x-1}$

$y=0 \quad\Rightarrow\quad 0 = \ln(1-2x) \quad\Rightarrow\quad 1-2x = 1 \quad\Rightarrow\quad x_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad f'(x_0) = f'(0) = -2$

$\alpha = \arctan(-2) = -63{,}43°$ entspricht dem Anstiegswinkel der Tangente.

Da das Vorzeichen nur die Richtung, in der der Winkel gemessen wird, festlegt, ist auch $\alpha = 63{,}43°$ Anstieg der Tangente!

Da der Anstieg einer geraden dem Schnittwinkel mit der x-Achse entspricht, folgt für den gesuchten Schnittwinkel β mit der y-Achse: $\beta = 90° - \alpha = 26{,}57°$!

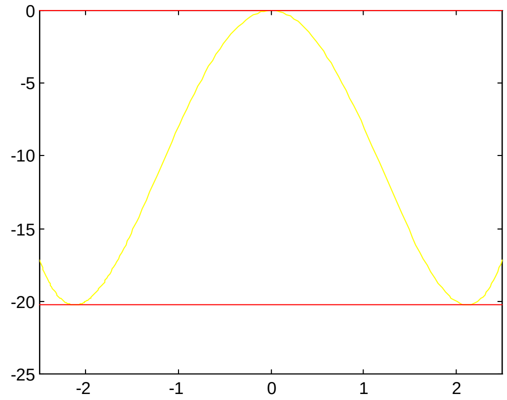
Aufgabe 9: $f'(x) = 4x^3 - 18x$

waagerechte Tangenten, falls $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_0 : (0\,;0)$

außerdem muß $4x^2 - 18 = 0$ *gelöst werden*

$$x^2 = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \quad \textit{und} \quad x_2 = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad P_1 : \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\ ; -\frac{81}{4} \right) \quad \textit{und} \quad P_2 : \left(-\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\ ; -\frac{81}{4} \right)$$



Waagerechte Tangenten in P_0 , P_1 und P_2 !

Aufgabe 10:

$$f'(x) = \frac{-2 - 3x^2}{2 \cdot \sqrt{6 - 2x - x^3}}$$

$$f'(-1) = \frac{-5}{2 \cdot 3} = -\frac{5}{6}$$

$\Rightarrow$ *Tangentengleichung*: $y = -\frac{5}{6}(x+1) + 3 = -\frac{5}{6}x + \frac{13}{6}$

$\Rightarrow$ *Normalengleichung*: $y = \frac{6}{5}(x+1) + 3 = \frac{6}{5}x + \frac{21}{5}$

MATLAB:

```
x=linspace(-2,0);
plot(x,sqrt(6-2*x-x.^3))
hold on
plot(x,-5/6*x+13/6,'r')
plot(x,6/5*x+21/5,'k')
axis equal
```