# Lösungen für 18.Übung Mathematik Sommersemester

**Aufgabe 1:**

a) $$y' = \frac{1+y^2}{y} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Trennung der Veränderlichen und Integration ergibt:

$$\int \frac{y}{1+y^2}\, dy = \int \frac{dx}{1+x^2} + c^* = \arctan x + c^*$$

$$\textit{Substitution} \quad z = 1+y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dy} = 2y \quad \Rightarrow dy = \frac{dz}{2y}$$

$$\Rightarrow \int \frac{y}{1+y^2}\, dy = \int \frac{y}{z \cdot 2 \cdot y}\, dz = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \cdot \ln|z| = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|1+y^2\right|$$

$$\Rightarrow \ln\left|1+y^2\right| = 2 \cdot \arctan x + \bar{c}$$

$$1+y^2 = e^{2\arctan x + \bar{c}} = e^{2\arctan x} \cdot e^{\bar{c}} = c \cdot e^{2\arctan x}$$

$$y^2 = c \cdot e^{2\arctan x} - 1$$

$$y = \pm\sqrt{c \cdot e^{2\arctan x} - 1}$$

b) $$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

Trennung der Veränderlichen und Integration ergibt:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2} + c$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + c = \frac{1+c \cdot x}{x}$$

$$y = \frac{x}{1+c \cdot x}$$

c) Trennung der Veränderlichen und Integration ergibt:

$$\int \sin y\, dy = -\int x\, dx + c^*$$

$$-\cos y = -\frac{x^2}{2} + c^*$$

$$\cos y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = \arccos\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

d) Trennung der Veränderlichen und Integration ergibt:

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int \cos x \; dx + c^* = \sin x + c^*$$

$$\textit{Substitution} \quad z = e^y \quad \Rightarrow \frac{dz}{dy} = e^y = z \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{e^y} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{e^y} = -e^{-y} \quad \Rightarrow$$

$$-e^{-y} = \sin x + c^*$$

$$e^{-y} = -\sin x + c$$

$$-y = \ln(-\sin x + c)$$

$$y = -\ln(-\sin x + c)$$

**Aufgabe 2:**

Überprüfen der Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes:

$$f(x,y) = -\frac{x}{2} - \sqrt{y + \frac{x^2}{4}} \quad \text{ist stetig}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{y + \frac{x^2}{4}}} \quad \text{stetig für } \sqrt{y + \frac{x^2}{4}} \neq 0 \quad \text{bzw. } y \neq -\frac{x^2}{4}$$

Für $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$ ergibt sich daraus: $1 \neq \frac{0}{4} = 0$

$\Rightarrow$ d.h. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ist stetig an der Stelle (0;1)

$\Rightarrow$ Bedingungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind erfüllt

$\Rightarrow$ ***AWP hat genau eine Lösung***!