Lösungen für 20.Übung Mathematik Sommersemester

Aufgabe 1:

a) allgemeine homogene Lösung: $y_h = c \cdot e^{3x}$

Ansatzfunktion für inhomogene Gleichung: $y_p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$2 \cdot a \cdot x + b = 3 \cdot a \cdot x^2 + 3 \cdot b \cdot x + 3 \cdot c + x^2 - 2 \cdot x + 7$$

$$2 \cdot a \cdot x + b = (3 \cdot a + 1) \cdot x^2 + (3 \cdot b - 2) \cdot x + 3 \cdot c + 7$$

$$\Rightarrow \quad 3 \cdot a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot a = 3 \cdot b - 2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{3} = 3 \cdot b - 2 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot b = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \quad b = 3 \cdot c + 7 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot c = \frac{4}{9} - 7 = -\frac{59}{9} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{59}{27}$$

$$y(x) = c \cdot e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot x^2 + \frac{4}{9} \cdot x - \frac{59}{27}$$

b) allgemeine homogene Lösung: $y_h = c \cdot e^{x}$

Ansatzfunktion für inhomogene Gleichung: $y_p(x) = a \cdot \sin 3x + b \cdot \cos 3x$

$$3 \cdot a \cdot \cos 3x - 3 \cdot b \cdot \sin 3x = a \cdot \sin 3x + b \cdot \cos 3x - 2 \cdot \sin 3x$$

$$3 \cdot a \cdot \cos 3x - 3 \cdot b \cdot \sin 3x = b \cdot \cos 3x + (a - 2) \cdot \sin 3x$$

$$\Rightarrow \quad 3 \cdot a = b$$

$$\Rightarrow \quad -3 \cdot b = a - 2 \quad \Rightarrow \quad -9 \cdot a = a - 2 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{5}$$

$$y(x) = c \cdot e^{x} + \frac{1}{5} \cdot \sin 3x + \frac{3}{5} \cos 3x$$

c) allgemeine homogene Lösung: $y_h = c \cdot e^{-x}$

Ansatzfunktion für inhomogene Gleichung: $y_p(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$

$$a \cdot \cos x - b \cdot \sin x = -a \cdot \sin x - b \cdot \cos x + \cos x$$

$$-b \cdot \sin x + a \cdot \cos x = -a \cdot \sin x + (1 - b) \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \quad -b = -a \quad \Rightarrow \quad a = b$$

$$\Rightarrow \quad a = 1 - b \quad \Rightarrow \quad a = 1 - a \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = b = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = c \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} \cdot (\sin x + \cos x)$$

d) allgemeine homogene Lösung: $y_h = c \cdot e^{10x}$

Ansatzfunktion für inhomogene Gleichung: $y_p(x) = a \cdot e^{-2x}$

$$-2 \cdot a \cdot e^{-2x} = 10 \cdot a \cdot e^{-2x} - e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \quad -2 \cdot a = 10 \cdot a - 1 \quad \Rightarrow \quad 12 \cdot a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{12}$$

$$y(x) = c \cdot e^{10x} + \frac{1}{12} \cdot e^{-2x}$$

Aufgabe 2: a) Substitution: $y_1 = y \quad y_2 = y' \quad y_3 = y''$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_3 + y_2 - y_1 \end{aligned}$$

b) Substitution: $y_1 = y \quad y_2 = y' \quad y_3 = y'' \quad y_4 = y^{(3)}$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= y_4 - 8 \cdot y_3 + 8 \cdot y_2 - 4 \cdot y_1 \end{aligned}$$